Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia
$$z = xy\ln(x^2 - y^2)$$
satisface egalitatea
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2(z + xy).$$

2. Să se determine extremele locale ale funcţiei reale de două variabile reale
$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

3. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip
$$I = \int_C (x^2 + y^2)(\ln z)ds$$
unde curba (C) este reprezentată parametric prin ecuaţiile
$$(C)\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \quad t \in [0,1]. \\ z = e^t, \end{cases}$$

4. Utilizând o schimbare de variabile adecvată să se calculeze integrala dublă
$$I = \iint\limits_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\,dxdy$$
unde domeniul D este coroana circulară $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 \le x^2 + y^2 \le e^2\}$.

5. Calculul integralelor duble pe domenii simple în raport cu axa Ox.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze derivata funcţiei reale

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^3), \qquad f(x,y,z) = e^{\frac{z}{x}} \sin y$$

   în punctul $M_0(3,0,-1)$ după direcţia versorului vectorului $\mathbf{v} = (2,-5,7)$.

2. Folosind teorema de derivabilitate a integralelor depinzând de parametru cu limitele de integrare variabile, să se determine funcţia $J(y)$ definită ca o integrală depinzând de parametrul y

$$J(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}\, dx.$$

   Indicaţie. *Se aplică teorema de derivabilitate a integralelor depinzând de parametru cu limitele de integrare variabile de forma* $J(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$. *Derivata funcţiei* $J(y)$ *este*

$$J'(y) \;=\; \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + \beta'(y) f(\beta(y),y) - \alpha'(y) f(\alpha(y),y).$$

3. Evaluaţi integrala de suprafaţă de tipul întâi

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2+y^2+z)\, d\sigma$$

   unde $(\mathcal{S})$ este porţiunea din paraboloidul de rotaţie cu vârful $V(0,0,4)$ punct de maxim, de ecuaţie $z = 4 - x^2 - y^2$, situată în semispaţiul superior $z \geq 0$.

4. În expresia diferenţială $E(x,y) = x\,y' + x\cos\dfrac{y}{x} - y + x$, funcţia $y = y(x)$ este derivabilă. Ce devine această expresie dacă se efectuează schimbarea de variabilă $\dfrac{y}{x} = z$, unde noua funcţie este $z = z(x)$?

5. Funcţia reală de mai multe variabile reale definită implicit de ecuaţia

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Fie $f : I\!\!R^2 \to I\!\!R$, $$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Să se arate că derivatele parţiale mixte de ordin 2 ale acestei funcţii în punctul $(0,0)$ nu sunt egale.

   Răspuns: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1;\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1.$

2. Integrala dublă $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ este prezentată ca iteraţia de integrale simple în forma $I = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$. Să se precizeze şi să se figureze grafic domeniul de integrare D şi apoi să se prezinte I ca iteraţie de integrale simple în cealaltă ordine.

   Răspuns: $I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy.$

3. Să se calculeze direct şi folosind formula integrală a lui Green, integrala curbilinie $I = \int_C -x^2ydx + xy^2dy$, unde C este cercul $x^2+y^2-R^2=0$ parcurs în sens invers acelor de ceasornic.

   Răspuns: $I = \dfrac{\pi R^4}{2}.$

4. Să se determine volumul elipsoidului care are ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

   Răspuns: $I = \dfrac{4\pi abc}{3}.$

5. Aplicaţiile în mecanică şi geometrie ale integralei de suprafaţă de speţa întâi.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze derivatele parţiale de ordin 1, 2, 3 pentru $f(x, y, z) = xye^z$.

2. Să se determine extremele condiţionate ale funcţiei scop $f(x, y, z) = xyz$, definită pe mulţimea deschisă $D = \{(x, y, z) \in I\!\!R^3 |\ x \geq y \geq z > 0\}$, ştiind că variabilele sale sunt supuse legăturilor

$$F_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0, \quad F_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8 = 0.$$

Indicaţie. *Se va arăta că funcţia lui Lagrange,*

$$\mathcal{L}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z),$$

are punctele staţionare:

$$(2, 2, 1; \lambda_1 = 4, \mu_1 = -2); \quad (7/3, 4/3, 4/3; \lambda_2 = 16/9, \mu_2 = -4/3),$$

iar $M_1(2, 2, 1)$, $M_2(7/3, 4/3, 4/3)$ *sunt puncte de minim şi maxim condiţionat.*

3. Calculaţi integrala curbilinie de prima speţă $I = \int_C \sqrt{y(2 - y)}ds$, unde C : $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$, iar $t \in [0, \pi/2]$. **Răspuns**: $I = 4/(3\sqrt{2})$.

4. Folosind coordonatele polare generalizate în plan, să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt[3]{5 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}},$$

unde D este coroana eliptică $D = \{(x, y) \in I\!\!R^2 :\ 1 \leq \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 4\}$ limitată de elipsele omofocale: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; $\dfrac{x^2}{(2a)^2} + \dfrac{y^2}{(2b)^2} - 1 = 0$, iar $a > 0$, $b > 0$ sunt semiaxele elipsei interioare.

5. Integrala triplă şi aplicaţiile ei în mecanică şi geometrie.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia $z = y \cdot \sin(x^2 - y^2)$ satisface egalitatea
$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Să se determine valorile extreme ale funcţiei reale de două variabile reale
$$f : I\!R^2 \to I\!R, \qquad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

3. Derivând în raport cu parametrul y, să se calculeze integrala
$$J(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2\theta) d\theta, \quad y > 1.$$

   Indicaţie. *În integrala obţinută după derivarea lui $J(y)$ se face substituţia* $\operatorname{tg}\theta = t$.

4. Scrieţi formula de calcul a integralei curbilinii de al doilea tip în plan
$$I = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$
   pe o curbă C de ecuaţii parametrice: $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, unde $t \in [a, b]$ şi calculaţi integrala curbilinie de al doilea tip
$$I = \int_C xy\, dx + (x^2 - y)dy,$$
   unde C este curba plană de ecuaţii parametrice $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3, \end{cases}$ iar $t \in [0, 1]$.

5. Să se definească domeniul plan D_y, simplu în raport cu axa Oy, să se scrie formula de calcul a integralei duble
$$I = \iint_{D_y} f(x, y)\, dxdy$$
   şi apoi determinaţi valoarea integralei duble $I = \iint_D xy\, dxdy$, unde D este domeniul plan limitat de parabola $y = x^2$ şi de dreapta $y = 2x + 3$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Arătaţi că funcţia $z = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$ verifică egalitatea (ecuaţia lui Laplace) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

2. Să se arate că integrala improprie de prima speţă $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$ este convergentă şi să i se determine valoarea.

   Indicaţie. *Se aplică criteriul de convergenţă în* α. R: $I = \ln 2$.

3. Folosind integrala dublă, să se determine volumul V al corpului mărginit de parabolidul de rotaţie de ecuaţie $z = 6 - x^2 - y^2$, cu axa de rotaţie axa Oz şi vârful (punct de maxim) în $A(0, 0, 6)$, şi de conul circular $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. **Indicaţie.** *Corpul ocupă un domeniu simplu în raport cu axa* Oz *pentru că*

   $$V = \{(x.y.z) \in I\!R^3 \,:\, 6 - x^2 - y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2},\ (x, y) \in D_{xy}\},$$

   unde D_{xy} *este proiecţia sa pe planul* Oxy. *Această proiecţie este discul de rază* 2 *cu centrul în origine* $x^2 + y^2 - 4 \le 0$. *Pentru calculul integralei duble se folosesc coordonatele polare* $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

4. Să se calculeze integrala triplă

   $$I = \iiint\limits_V \Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\Big) dxdydz,$$

   unde V este domeniul tridimensional mărginit de elipsoidul de semiaxe $a > 0, b > 0, c > 0$ de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

   Indicaţie. *Volumul este dat de* $Vol V = \iiint_V dxdydz$. *Se trece la coordonatele sferice (polare) generalizate.* **Răspuns**: $I = \dfrac{4\pi abc}{5}$.

5. Integrala curbilinie de speţa întâi (de primul tip) şi aplicaţiile ei în mecanică (firul material) şi geometrie (lungimea unui arc de curbă).

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia

$$w = f\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\Big), \quad \text{unde} \quad f \in C^2(D), \quad D \subset I\!R^2,$$

satisface egalitatea

$$x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

2. Să se determine extremele condiţionate ale funcţiei reale de trei variabile reale

$$f(x, y, z) = x + 2y - 2z$$

cu legătura $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$.

3. Să se arate că integrala curbilinie de al doilea tip

$$I = \int_C e^{(-x^2+y^2)}\Big(\cos(2xy)\,dx + \sin(2xy)\,dy\Big)$$

luată pe o curbă (C) închisă, netedă pe porţiuni, este nulă.

4. Utilizând o schimbare de variabile adecvată să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint\limits_D (4x - 3 - x^2 - y^2)dxdy$$

unde domeniul D este discul închis (bila închisă din $I\!R^2$)

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 |\ x^2 + y^2 - 4x + 3 \leq 0\}.$$

Indicaţie. *Se scrie D în forma $(x-2)^2 + y^2 - 1 \leq 0$ şi se face schimbarea de variabile $x - 2 = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$. Se găseşte $I = \pi/2$.*

5. Spaţiul euclidian (prehilbertian) $I\!R^n$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se determine extremele locale ale funcţiei reale de trei variabile reale

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

2. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, unde

$$F(x, y, z) = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2),$$

iar $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$ este o funcţie reală de două variabile reale, diferenţiabilă pe un domeniu $D \subset I\!\!R^2$.

3. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint\limits_D \sin(x^2 + y^2)dxdy$$

unde domeniul D este coroana circulară definită prin

$$D = \{(x, y) \in I\!\!R^2 \mid \ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

4. Să se determine aria suprafeţei S tăiată din paraboloidul hiperbolic

$$(S): \quad z = xy$$

de cilindrul circular

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

5. Formula de calcul a integralei triple pe domenii simple în raport cu axa Oz.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ verifică egalitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big)^2 = 0.$$

2. Să se arate că funcţia reală de trei variabile reale

$$f(x,y,z) \;=\; \frac{xy}{z}\ln x + x \cdot \operatorname{arctg}\Big(\frac{y+z}{x}\Big),$$

verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} + z\,\frac{\partial f}{\partial z} = f(x,y,z) + \frac{xy}{z}.$$

3. Să se afle extremele condiţionate ale funcţiei obiectiv

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z,$$

cunoscând că variabilele sale satisfac legătura

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

4. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip

$$I = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \ln z \cdot ds,$$

unde arcul de curbă în spaţiu C are ecuaţiile parametrice

$$C : \begin{cases} x &= e^t \cdot \cos t, \\ y &= e^t \cdot \sin t, \\ z &= e^t, \qquad\qquad t \in [0,1]. \end{cases}$$

5. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$$

unde domeniul V este mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Teorema de existenţă şi unicitate a unei funcţii reale de o variabilă reală definită implicit de ecuaţia $F(x, y) = 0$, unde $F : D \subset I\!R^2 \to I\!R$.

2. Să se arate că funcţia $z = (x^2 + y^2)\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$ verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2z.$$

3. Determinaţi extremele locale ale funcţiei reale de trei variabile reale

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \quad f(x, y, z) = x^2y + yz + 32x - z^2.$$

4. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint\limits_D \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

unde D este mulţimea din planul Oxy definită de

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 |\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \le 0\},$$

iar $a > 0$ şi $b > 0$ sunt semiaxele elipsei care constituie frontiera domeniului D.

5. Calculaţi integrala triplă

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz,$$

unde domeniul de integrare V este mulţimea din spaţiul euclidian tridimensional $Oxyz$ mărginită de suprafeţele: paraboloidul de rotaţie cu axa de rotaţie Oz şi vârful în origine, de ecuaţie $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$; şi de planul $z = 2$, paralel cu planul Oxy.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Folosind criteriul integral al lui Cauchy, să se studieze natura seriei numerice cu termeni pozitivi
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}.$$

2. Să se arate că derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei reale
$$z(x,y) \quad = \quad y^{\frac{y}{x}}\sin\frac{y}{x}$$
satisfac ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi
$$x^2\,\frac{\partial z}{\partial x} + x\,y\,\frac{\partial z}{\partial y} = y\,z.$$

3. Să se verifice dacă integrala curbilinie
$$I = \int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)}\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$
este independentă de drum pe $I\!R^3$ şi apoi să se calculeze valoarea sa aplicând formula lui Leibniz–Newton.

4. Calculaţi integrala triplă
$$I = \iiint\limits_V y\,dxdydz$$
unde V este tetraedrul din primul octant limitat de planele de coordonate şi de planul $x+y+z-2=0$.

5. Aplicaţii ale integralei duble în geometrie (aria unui domeniu plan) şi în mecanică (masa, centrul de greutate şi momente de inerţie ale unei plăci plane).

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Utilizând de două ori integrarea prin părţi, să se calculeze integrala improprie de speţa întâi
$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx,$$
unde a este un număr real pozitiv iar $b \in \mathbb{R}$.

2. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4.$$

3. Să se determine elementul de arc ds şi să se calculeze lungimea curbei
$$(C) \quad \begin{cases} x &= a\, e^{-t} \cos t \\ y &= a\, e^{-t} \sin t \qquad t \in [0, +\infty) \\ z &= b\, e^{-t}, \end{cases}$$
unde a, b sunt constante reale.

4. Să se calculeze integrala triplă
$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
unde domenuil de integrare V este situat în semispaţiul superior $z \geq 0$, conţine o porţiune din semiaxa pozitivă Oz şi este delimitat de sferele:
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
şi de conul cu vârful în origine de ecuaţie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Aplicaţii ale integralelor duble în mecanică: masa, centrul de greutate, momente de inerţie şi momente statice ale unei plăci plane; fluxul luminos incident pe o placă; debitul unui fluid prin secţiunea transversală a unui canal; volumul unui cilindroid

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că derivatele parţiale ale funcţiei reale

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + (x^2 + y^2)\sin\frac{x}{y}$$

satisfac ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y).$$

2. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint\limits_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\,dxdy,$$

unde domeniu D este definit prin

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le e^2\}.$$

3. Să se calculeze masa plăcii plane materiale omogene de densitate egală cu unitatea şi configuraţia coroana eliptică mărginită de elipsele:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 4 = 0$$

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

unde V este coroana sferică cuprinsă între sferele

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

5. Aria unei porţiuni de suprafaţă determinată cu ajutorul integralei duble.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Arătaţi că funcţia $f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln\dfrac{x-y}{x+y}$ verifică egalitatea

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y).$$

2. Determinaţi punctele din $I\!R^2$ în care, local, funcţia

$$f : I\!R^2 \to I\!R, \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 2$$

   are valori extreme.

3. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speţă (de primul tip)

$$I = \int_{AB} (x + y + z)\, ds,$$

   unde arcul de curbă în spaţiu AB are ecuaţiile parametrice

$$AB : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = b\,t, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}], \end{cases}$$

   iar a şi b sunt constante reale pozitive.

4. Folosind schimbarea de variabile "trecerea la coordonatele polare ρ şi θ," să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

   unde $D \subset I\!R^2$ este coroana circulară de raze 1 şi e, cu centrul în origine, adică

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 |\ 1 \le x^2 + y^2 \le e^2\}.$$

5. Derivata după o direcţie $\mathbf{s} \in I\!R^n$, cu $\|\mathbf{s}\| = 1$, a unei funcţii reale de mai multe variabile reale (sau de variabila vectorială $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$) $f : D \to I\!R$, unde D este un domeniu din $I\!R^n$, într–un punct $\mathbf{a} \in \mathbf{D}$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012
Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că derivatele parţiale ale funcţiei reale
$$z = y\sin(x^2 - y^2)$$
satisfac ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei
$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},$$
definită în primul octant $x > 0, y > 0, z > 0$.

3. Să se calculeze integrala dublă
$$I = \iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$
unde D este coroana circulară
$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ \frac{\pi^2}{16} \le x^2 + y^2 \le \frac{\pi^2}{4}\}.$$

4. Să se calculeze integrala de suprafaţă de speţa întâi
$$I = \iint\limits_S (xy + yz + zx)d\sigma,$$
unde S este porţiunea din conul cu vârful în origine şi axa de rotaţie Oz
$$(\mathcal{S}): \quad z = \sqrt{x^2+y^2}$$
decupată de cilindrul circular
$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$
cu generatoarele paralele cu axa Oz ce se sprijină pe cercul din planul xOy cu centrul pe Oy în punctul $(0, a, 0,)$ şi raza egală cu $a > 0$.

5. Derivabilitatea şi derivate parţiale de ordinul întâi ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că derivatele parţiale ale funcţiei reale $z = y\cos(x^2 - y^2)$ satisfac ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Să se determine extremele condiţionate ale funcţiei scop $f(x, y) = xy$ cu legătura $F(x, y) = 2x + 3y - 5 = 0$.

3. Să se calculeze integrala dublă $I = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, unde D este coroana circulară $D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \frac{\pi^2}{36} \le x^2 + y^2 \le \frac{\pi^2}{9}\}$.

4. Să se calculeze integrala de suprafaţă de speţa a doua
$$I = \iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$
unde S este faţa exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situată în semispaţiul superior $z \ge 0$.

   Indicaţie. *Versorul* $\mathbf{n}$ *al normalei exterioare emisferei într–un punct* $M(x, y, z)$ *este coliniar şi de acelaşi sens cu vectorul de poziţie* $\mathbf{r}$ *al punctului* M, *a cărui mărime este raza sferei. Deci* $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{a} = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k}$, *ceea ce arată că* $\cos\alpha = \frac{x}{a}$, $\cos\beta = \frac{y}{a}$, $\cos\gamma = \frac{z}{a}$. *Ţinând cont că* $dydz = \cos\alpha d\sigma$, $dzdx = \cos\beta d\sigma$, $dxdy = \cos\gamma d\sigma$, *rezultă că* I *se reduce la integrala de suprafaţă de speţa întâi*
$$I = \frac{1}{a}\iint\limits_S (x^3 + y^3 + z^3) d\sigma,$$
unde $d\sigma$ este elementul de arie al emisferei, a cărei ecuaţie poate fi scrisă în forma carteziană explicită $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Integrala dublă la care se reduce I se va calcula folosind coordonatele polare în plan: $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$.

   Răspuns: $I = \frac{\pi a^4}{2}$.

5. Derivate parţiale de ordin superior ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Derivabilitate parţială şi derivate parţiale de ordin superior ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale.

2. Arătaţi că funcţia $\omega(x, y, z) = f(x \cdot y, x^2 + y^2 - z^2)$, unde $(u, v) \mapsto f(u, v)$ este o funcţie reală de două variabile reale, satisface ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$xz\frac{\partial \omega}{\partial x} - yz\frac{\partial \omega}{\partial y} + (x^2 - y^2)\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

3. Să se arate că dacă a şi b sunt constante reale pozitive, atunci integrala improprie de speţa întâi $I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ are valoarea $I = \frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b}$.

4. Calculaţi integrala triplă

$$I = \iiint\limits_V (x + y + z)dxdydz,$$

unde domeniul de integrare V este definit de

$$V = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \ \frac{1}{2a}(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}\},$$

proiecţia sa pe planul Oxy este discul D cu centrul în origine şi rază $a\sqrt{2}$, iar a este o constantă reală pozitivă.

$$\textbf{Răspuns}: \ I = \frac{5\pi a^4}{3}.$$

5. Să se determine extremele locale ale funcţiei reale de trei variabile reale

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze diferenţialelele $df(x,y)$ şi $d^2f(x,y)$ pentru funcţia $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, unde $y \neq 0$.

2. Să se arate că funcţia $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$ satisface egalitatea

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

3. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei reale de trei variabile reale

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4.$$

4. Scrieţi formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip în spaţiu

$$I = \int_C f(x,y,z)ds$$

şi calculaţi integrala curbilinie de primul tip $I = \displaystyle\int_C (x^2 + y^2) \ln z \, ds$, unde C este curba din spaţiu de ecuaţii parametrice

$$C : \begin{cases} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t, \\ z &= e^t, \qquad t \in [0,1]. \end{cases}$$

5. Folosind coordonatele polare în plan şi formula schimbării de variabile în integrala dublă, să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \, dxdy,$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ este discul închis cu centrul în origine şi rază $R > 0$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ verifică relaţia
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}.$$

2. Să se calculeze aria domeniului D, din planul Oxy, mărginit de curbele:
$$\begin{aligned} &xy = a; \quad xy = b; \qquad b > a > 0 \\ &y = \alpha x; \quad y = \beta x, \qquad \beta > \alpha > 0, \end{aligned}$$
situat în primul cadran al sistemului de coordonate Oxy.

   Indicaţie. *În integrala dublă* $I = \iint\limits_D dxdy$, *care dă aria domeniului* D, *se efectuează schimbarea de variabile*
$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv}. \end{cases}$$

3. Arătaţi că funcţia $f(x, y) = (x^2 + y^2)\cos\dfrac{y}{x}$ este omogenă, precizaţi gradul de omogeneitate m şi verificaţi identitatea lui Euler
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = mf(x, y).$$

   Indicaţie. *Se arată că* $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$, *se precizeaza gradul de omogeneitate* m *si se verifica apoi identitatea.*

4. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei
$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3y.$$

5. Integrale improprii

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Folosind criteriul integral al lui Cauchy, să se studieze natura seriei numerice cu termeni pozitivi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}}.$$

2. Să se arate că derivatele parţiale ale funcţiei reale
$$f(x,y) \quad = \quad (x^2+y^2)\sin\frac{y}{x}$$
satisfac ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi
$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y).$$

3. Să se calculeze derivata funcţiei reale
$$f\in\mathcal{F}(I\!R^3), \qquad f(x,y,z) = e^{\frac{z}{x}}\,\sin y$$
în punctul $M(3,0,-1)$ după direcţia versorului vectorului $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

4. Să se calculeze integrala dublă
$$I = \iint\limits_{D} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$$
unde D este coroana circulară
$$D = \{(x,y)\in I\!R^2 : \ \frac{\pi^2}{16} \le x^2+y^2 \le \frac{\pi^2}{9}\}$$
mărginită de cercurile concentrice cu centrul în origine de raze $\pi/4$ şi $\pi/3$.

5. Schimbarea de variabile în integrala triplă.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se scrie formula lui Mac Laurin, cu restul lui Lagrange de ordinul $2n$, pentru funcţia $f \in \mathcal{F}(I\!R)$, $f(t) = \sin t$.

2. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speţă $I = \int_C y\, e^{-x}\, ds$, unde curba plană C are ecuaţiile parametrice

$$C : \begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ \\ y = 2 \operatorname{arctg} t - t + 1, \end{cases}$$

iar parametrul t ia valori în intervalul $[0, 1]$.

Răspuns: $I = \dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{1}{2} \ln 2 + \dfrac{\pi}{4}$.

3. Să se calculeze integrala triplă $I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, unde V este domeniul tridimensional mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
Răspuns: $I = 0$.

4. Verificaţi că forma diferenţială

$$\omega = (3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy$$

este o expresie diferenţială exactă şi determinaţi o primitivă a sa.

Indicaţie. *Dacă expresia diferenţială $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ are funcţiile P şi Q definite pe un domeniu simplu conex $D \subset I\!R^2$ şi admit derivate parţiale, prima în raport cu y şi a doua în raport cu x, atunci ω este diferenţială exactă pe D dacă $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$, iar o primitivă a sa (o funcţie diferenţiabilă $U(x, y)$ cu proprietatea $dU(x, y) = \omega$) are expresia*

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt.$$

5. Scimbarea de variabile în integrala dublă.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Arătaţi că funcţia $z = y\ln(x^2 - y^2)$ satisface egalitatea
$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Să se determine elementul de arc ds şi lungimea curbei
$$C: \begin{cases} x &= \sqrt{2}\cos^2 t, \\ y &= \sqrt{2}\sin^2 t, \\ z &= \sin 2t, \qquad t \in [0,\pi]. \end{cases}$$

3. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip în spaţiu
$$I = \int_C z\sqrt{a^2 - x^2}\,dx + xz\,dy + (x^2 + y^2)\,dz,$$
unde curba C pe care se integrează are ecuaţiile parametrice
$$C: \begin{cases} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \\ z &= b\,t, \quad t \in [0,\pi/2], \end{cases}$$
iar a şi b sunt constante reale pozitive.

4. Calculaţi integrala dublă $I = \iint\limits_D \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy$, unde D este coroana circulară $D = \{(x,y) \in I\!R^2 |\ 1 \le x^2 + y^2 \le e^2.\}$

5. Să se calculeze integrala de suprafaţă de tipul al doilea
$$I = \iint\limits_S x^3y^2\,dydz + x^2y^3\,dzdx + 3z\,dxdy,$$
unde S este faţa exterioară a domeniului V mărginit de paraboloizii:
$$(\Sigma_1): \ z = x^2 + y^2; \qquad (\Sigma_2): \ z = 6 - x^2 - y^2.$$
Indicaţie. *Cel de al doilea paraboloid are vârful $A(0,0,6)$ ca punct de maxim. Se poate aplica formula integrală Gauss–Ostrogradski*
$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_V \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz,$$
unde $V \subset I\!R^3$ este domeniul mărginit de $S = (\Sigma_1) \cup (\Sigma_2$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică:

1. Să se arate că funcţia $z = y\sin(x^2 - y^2)$ verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Determinţi extremele condiţionate ale funcţiei $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ cu legătura $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

   Indicaţie. *Se va arăta mai întâi că funcţia lui Lagrange* $\mathcal{L} = f + \lambda F$ *are punctele critice* $(4/5, 3/5; 5/2)$ *şi* $(-4/5, -3/5; -5/2)$ *şi apoi că* $M_1(4/5, 3/5)$ *şi* $M_2(-4/5, -3/5)$ *sunt puncte de extrem condiţionat ale funcţiei scop* f. **Răspuns**: $f_{\min} = f(4/5, 3/5) = 1$; $f_{\max} = f(-4/5, -3/5) = 11$.

3. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy$, unde C este cercul $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ parcurs în sens direct trigonometric.

   Indicaţie. *Se foloseşte reprezentarea parametrică a cercului* $x = R\cos t$ *şi* $y = R\sin t$, *unde parametrul* t *ia valori între* 0 *şi* 2π. **Răspuns**: $I = \pi R^4/2$.

4. Calculaţi integrala de suprafaţă de speţa întâi $I = \iint_S (x + y + z)d\sigma$, unde S este porţiunea din conul cu vârful în origine ale cărui generatoare fac unghi de 45^o cu axa Oz, de ecuaţie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, cuprinsă între planele $z = 0$ şi $z = h > 0$.

   R: $I = 2\pi h^3\sqrt{2}/3$.

5. Să se calculeze volumul acelei părţi a corpului delimitat de sferele concentrice:
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2; \quad 0 < a < b$$
   şi de conul circular $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ care conţine o parte din semiaxa pozitivă Oz.

   Indicaţie. V$ol = \iiint_V dxdydz$. *Această integrală se calculează folosind schimbarea de variabile. Se trece la coordonate sferice. Atenţie! parametrul* θ *(colatitudinea) ia valori în intervalul* $[0, \pi/4]$.

   Răspuns. V$ol = \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)(2 - \sqrt{2})$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Utilizând de două ori integrarea prin părţi, să se calculeze integrala improprie de speţa întâi
$$I = \int_0^\infty e^{-3x}\sin 2x dx.$$

2. Folosind teorema de derivabilitate a integralelor depinzând de parametru, să se evalueze integrala
$$\Phi(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(yx)}{x\sqrt{1-x^2}}dx.$$
Indicaţie. *Dacă funcţia continuă $f(x,y)$ admite derivată parţială continuă în raport cu y, atunci integrala depinzând de parametrul y*
$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dy$$
este derivabilă şi $\Phi'(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ *(formula de derivare a lui Leibniz).*

3. Să se determine elementul de arc ds şi să se calculeze lungimea curbei
$$(C)\quad \begin{cases} x &= t,\\ y &= \sqrt{2}\ln\cos t, \qquad t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}].\\ z &= \operatorname{tg} t - t, \end{cases}$$

4. Utilizând coordonatele polare, să se calculeze integrala dublă
$$I = \iint_D xy\, e^{x^2+y^2} dxdy$$
unde D este sfertul discului de rază 1 cu centrul în origine conţinut în primul cadran al planului raportat la reperul cartezian xOy
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

5. Diferenţiale de ordin superior ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Funcţia reală de mai multe variabile reale definită implicit de ecuaţia

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0.$$

2. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speţă $I = \int_C -ydx + xdy$, unde curba C este elipsa de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t \end{cases}$$

parcursă în sensul creşterii parametrului $t \in [0, 2\pi]$, iar $a > 0$ şi $b > 0$ sunt semiaxele elipsei.

3. Fie funcţia

$$f : I\!R^2 \to I\!R_+, \quad f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}, \quad (x,y) \in I\!R^2.$$

Pornind de la definiţia derivatelor parţiale de ordinul întâi, să se calculeze

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{\pi}{4}, 0\Big); \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big).$$

4. Să se determine extremele locale ale funcţiei

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \quad f(x,y,z) = x^2y + yz + 32x - z^2.$$

5. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speţă $I = \displaystyle\int_C y\, e^{-x} ds$, unde curba C are ecuaţiile parametrice

$$C: \begin{cases} x &= \ln(1 + t^2) \\ y &= 2\,\mathrm{arctg}\, t - t + 1, \end{cases}$$

iar parametrul curbaei t variază între 0 şi 1.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze derivata funcţiei reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \qquad f(x,y) = x^2 - y^2$$

   în punctul $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ după direcţia $\mathbf{s} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\mathbf{j}$.

2. Să se arate că funcţia reală de două variabile reale $z = z(x,y)$,

$$z(x,y) = xy + x \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

   definită pe un domeniu plan D care nu intersectează axa Oy, satisface ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

3. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip

$$I = \int_{\mathcal{C}} (y+2z)dx + (z+2x)dy + (x+2y)dz,$$

   unde $(\mathcal{C})$ este cercul de intersecţie al sferei de rază $R > 0$ cu centrul în origine de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ cu planul $x + y + z - R = 0$, parcurs în sens invers acelor de ceasornic dacă se priveşte dinspre partea pozitivă a axei Ox.

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)z\,dxdydz$$

   unde domeniul V este mărginit de paraboloidul de rotaţie $z = x^2 + y^2$ şi de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ şi conţine o parte din porţiunea nenegativă a axei Oz.

5. Integrale depinzând de parametru.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012
Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia $u(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$ verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1.$

2. Să se scrie formula lui Taylor cu restul de ordin $N = 2$ sub forma lui Lagrange, în punctul $t_0 = 1$, pentru funcţia $f(t) = (2t+3)\cdot e^{2t}$.

   Indicaţie. *Formula care trebuie aplicată este*

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}(t-t_0)^3,$$

   unde ultimul termen reprezintă restul de ordin doi sub forma lui Lagrange, iar $\xi_2 = t_0 + \theta(t-t_0)$, *cu* $\theta \in (0,1)$.

   Răspuns: $(2t+3)\cdot e^{2t} = 5e^2 + 12e^2(t-1) + 14e^2(t-1)^2 + \dfrac{8}{3}(\xi+3)e^{2\xi}(t-1)^3.$

3. Să se determine valoarea integralei improprii de speţ a doua

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

   Indicaţie. *Se face substituţia* $\sqrt{1-x} = t \Longrightarrow x = 1 - t^2 = \varphi(t)$.

   Răspuns: $I = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip

$$I = \int_C (x+y+z)ds, \qquad C : \begin{cases} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t, \\ z &= bt, \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad a > 0, \quad b > 0.$$

5. Calculaţi integrala dublă $I = \displaystyle\iint_D xydxdy$, unde D este domeniul mărginit de parabola $y = x^2$ şi de dreapta $y = 2x+3$.

   Indicaţie. *Se arată că* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ -1 \le x \le 3,\ x^2 \le y \le 2x+3\}$, *deci este un domeniu simplu în raport cu axa* Oy *şi se aplică formula de calcul.*

   Răspuns: $I = 331/6$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Calculaţi derivatele parţiale de ordin 1, 2, 3 pentru funcţia reală de trei variabile reale $f(x,y,z) = y\ \ln(x^2+z^2+1)$.

2. Să se studieze existenţa şi derivabilitatea funcţiei $z = z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia

$$3xyz + x^2z^2 - 5(x+y) = 0$$

şi condiţia $z(1,-2) = 1$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul 1 şi 2 ale funcţiei z în punctul $(1,-2)$.

R: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,-2) = -\dfrac{9}{4}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,-2) = -\dfrac{1}{2}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-2) = \dfrac{13}{8}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-2) = -\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-2) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,-2) = -\dfrac{1}{8}$.

3. Să se aplice formula lui Leibniz–Newton pentru calculul integralei curbilinii

$$I = \int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}(xdx + ydy + zdz).$$

Răspuns: $I = \sqrt{51} - 1$.

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint\limits_V (xy + yz + zx)dxdydz,$$

unde $V = \{(x,y,z) \in I\!R^3 |\ x^2+y^2+z^2+4z \le 0,\ x^2+y^2 \le z^2\}$.

Răspuns: $I = 0$.

5. Integrale improprii.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia reală de două variabile reale
$$z = xy + x\sin\frac{y}{x}$$
satisface egalitatea
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

2. Se dă expresia diferenţială
$$\omega = \Big(\frac{z}{x^2y} - \frac{z}{x^2+z^2}\Big)dx + \frac{z}{xy^2}dy + \Big(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\Big)dz$$
definită pe un domeniu tridimensional D simplu conex care nu intersectează planele de coordonate Oyz şi Ozx.

   Să se arate că expresia diferenţială ω este o diferenţială exactă şi să se determine funcţiile primitive ale sale.

3. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$, unde densitatea ρ este constantă şi egală cu unitatea, iar configuraţia D a plăcii este domeniul plan
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \le a^2,\ x^2 + y^2 \ge ax,\ y \ge 0,\ a > 0\}.$$

4. Să se calculeze integrala triplă
$$I = \iiint\limits_V (x^2y^2 + 3)dxdydz$$
unde V este domeniul tridimensional V mărginit de paraboloizii de rotaţie
$$(\Sigma_1):\quad z = x^2 + y^2; \qquad (\Sigma_2):\quad z = 6 - x^2 - y^2.$$

5. Diferenţiabilitate şi diferenţiala de ordinul întâi ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia reală de două variabile reale
$$f : D \subset I\!\!R^2 \to I\!\!R, \qquad f(x,y) \;=\; (x^2+y^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x},$$
unde D este o mulţime deschisă din $I\!\!R^2$ care nu conţine puncte ale axei Oy, verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea
$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,x\,y\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,f(x,y), \quad (\forall)\;(x,y) \in D,$$

2. Să se determine elementul de arc ds şi să se calculeze lungimea curbei
$$(C)\quad \begin{cases} x \;=\; a\,e^{-t}\cos t \\ y \;=\; a\,e^{-t}\sin t \qquad\qquad t \in [0,+\infty) \\ z \;=\; b\,e^{-t}, \end{cases}$$
unde a, b sunt constante reale.

3. Să se calculeze integrala dublă
$$I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{1 + b^2x^2 + a^2y^2},$$
unde $D = \{(x,y) \in I\!\!R^2 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \le 0\}$.
Indicaţie. *Folosiţi coordonatele polare generalizate în plan:* $x = a\rho\cos\theta,\ y = b\rho\sin\theta,$ *cu* $\rho \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]$ *şi cu jacobianul* $J = ab\rho$.

4. Să se calculeze integrala triplă
$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
unde domeniul de integrare V, este situat în semispaţiul superior $z \ge 0$, conţine o porţiune din semiaxa pozitivă Oz şi este mărginit de sferele:
$$x^2+y^2+z^2 = 1; \quad x^2+y^2+z^2 = 9$$
şi de conul cu vârful în origine de ecuaţie $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

5. Extreme locale ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale. Teorema lui Fermat. Condiţii suficiente de extrem.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze valoarea integralei improprii de prima speţă

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)},$$

unde $a > 0, b > 0$ sunt constante date.

2. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$$

unde domeniul D este

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\}.$$

3. Calculaţi derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei

$$f(x,y,z) = e^{xyz} \cdot \cos\Big(\frac{y}{xz}\Big).$$

4. Să se determine aria suprafeţei S tăiată din paraboloidul hiperbolic

$$(S): \quad z = xy$$

de cilindrul circular

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

5. Sisteme de funcţii reale de mai multe variabile reale definite implicit.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Folosind criteriul integral al lui Cauchy, să se studieze natura seriei cu termeni pozitivi
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^{\alpha}},$$
unde α este un parametru real. Discuţie după α.

2. Să se arate că derivatele parţiale ale funcţiei reale
$$f(x,y) \quad = \quad (x^2 - y^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + (x^2 + y^2)\sin\frac{x}{y}$$
satisfac ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y).$$

3. Să se calculeze integrala dublă
$$I = \iint\limits_{D} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$$
unde domeniul D este
$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ \frac{\pi^2}{36} \le x^2 + y^2 \le \frac{\pi^2}{9}\}.$$

4. Să se calculeze momentul de inerţie faţă de axa Ox a solidului omogen de densitate egală cu unitatea şi configuraţia interiorul semisferei de ecuaţie
$$z \quad = \quad \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

5. Independenţa de drum a integralelor curbilinii

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze următoarea limită
$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{5x}{5x+3}\Big)^{2x+3}.$$

2. Să se calculeze derivatele parţiale şi diferenţiale de ordinul întâi ale funcţiei
$$f(x,y)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2}+\ln\sqrt{x^2+y^2}$$
în punctul $(-3,4)$.

3. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei
$$f(x,y)=(x-1)^2+2y^2.$$

4. Să se calculeze următoarea integrală dintr–o funcţie raţională
$$\int\frac{dx}{x^2-7x+10}.$$

5. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speţă $\int_{(C)}(2a-y)dx-(a-y)dy$, unde curba C este bucla de cicloidă
$$(C)\quad\begin{cases} x &= a(t-\sin t),\\ y &= a(1-\cos t),\end{cases}\qquad t\in[0,2\pi].$$
Indicaţie. *Se aplică formula de calcul a unei integrale curbilinii de speţa a doua în plan*
$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\Big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)dt.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze următoarea limită:

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2+8x+15}{x^2+2x-15}.$$

2. Să se calculeze diferenţialele de ordinul întâi şi doi ale funcţiei reale de două variabile reale

$$f(x,y) = (1+x^2+y^2)\text{arctg}\,(xy) + \ln \text{arctg}\,(x^2+y^2),$$

în punctul de coordonate $(1,-1)$.

3. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei reale de două variabile reale

$$f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 6x + 6y,$$

definită în întreg planul $I\!R^2$.

4. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip

$$\int_{(C)} \sqrt{1-x^2}\,dx + xdy,$$

unde curba (C) este reprezentată parametric de ecuaţiile

$$(C)\quad \begin{cases} x &= \cos t, \\ y &= 5\sin t, \end{cases}$$

iar parametrul t ia valori în intervalul $[0, 2\pi]$.
Indicaţie. *Se vor folosi formulele trigonometrice*

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}.$$

5. Să se calculeze următoarea integrală dintr–o funcţie raţională

$$\int \frac{dx}{x^2+3x-4}.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Sistemul $\begin{cases} x + y + u^2 + v^2 &= 1 \\ xy + u^3 + v^3 &= 2 \end{cases}$ defineşte implicit pe u şi v ca funcţii de x şi y. Să se determine derivatele parţiale de ordinul întâi $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.
   Indicaţie. *Se derivează pe rând cele doua ecuaţii în raport cu x şi apoi cu y, ţinându–se cont că $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$.*

2. Arătaţi că funcţia reală de două variabile reale

$$u(x, t) = \sin x \cdot e^{(-k^2 t)},$$

   unde k este o constantă reală cunoscută, denumită **constanta de difuzie**, satisface ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea a **propagării căldurii**

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

3. Să se calculeze integrala dublă $I = \displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{(4 + x^2 + y^2)^2}$, unde D este discul închis $x^2 + y^2 \leq 1$.
   Indicaţie. *Se va trece la coordonate polare în plan.* **Răspuns:** $I = \dfrac{9\pi}{800}$.

4. Folosind integrala triplă, să se găsească volumul solidului mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ şi conul $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, situat în exteriorul conului.
   Indicaţie: *Sfera are centrul în punctul $(0, 0, 2R)$ şi raza R, iar conul este cu vârful în origine şi axa de rotaţie, axa Oz. Curbele de intersecţie ale conului cu sfera sunt două cercuri care se proiectează pe planul Oxy după cercurile $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ şi $x^2 + y^2 - \dfrac{9R^2}{25} = 0$. Corpul este simplu în raport cu Oz*

$$V = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \,:\, (x, y) \in D_{xy},\ 2R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}\},$$

   unde D_{xy} este proiecţia corpului pe planul Oxy care este coroana circulară $\dfrac{9R^2}{25} \leq x^2 + y^2 \leq R^2$. Integrala dublă obţinută se calculează utilizând coordonatele polare.

5. Diferenţiabilitatea şi diferenţiala de ordinul întâi ale unei funcţii reale de variabilă vectorială.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergenţa seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(a+1)(2a+1)...(na+1)},$$

unde $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$. Discuţie după parametrul a.

Indicaţie. *Se aplică criteriul raportului (a lui D'Alembert). Se găseşte că limita este* $\frac{e}{a}$, *care se compară cu* 1.

2. Să se arate că funcţia

$$f(x,y) = x^n \text{arctg}\, \frac{y}{x^2}$$

verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = n \cdot f(x,y).$$

3. Să se determine extremele funcţiei $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $F(x,y,z) = 0$, unde $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10$.

4. Să se calculeze integrala improprie $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$, arătând mai întâi că este convergentă.

Indicaţie. *Convergenţa se arată utilizând* **criteriul în** α. Se găseşte $\alpha = 1/2$, deci mai mic ca 1, *ceea ce arată că integrala improprie* I *este convergentă. Valoarea sa se calculează folosind, de exemplu, substituţia* $x = \sin t$.

5. Să se calculeze integrala de suprafaţă de prima speţă

$$I = \iint_S (x+y+z)d\sigma,$$

unde S este porţiunea din sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ aflată deasupra planului $z = 3$.

Indicaţie. *Arătaţi întâi că suprafaţa este* **calota sferică** $z = 2+\sqrt{4-x^2-y^2}$, *care se proiectează pe planul* Oxy *în discul* D *cu centrul în origine, de rază* $R = \sqrt{3}$. *Utilizaţi formula de calcul a unei integrale de suparafaţă de speţa întâi de forma* $I = \iint_S F(x,y,z)d\sigma$, *când suprafaţa* S *este dată cartezian explicit prin ecuaţia* $z = f(x,y)$, *cu* $(x,y) \in D \subset Oxy$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia $f(x,y) = \dfrac{x^2+1}{y^2} - \ln y + \ln\sqrt{1+x^2}$, definită în semiplanul $y > 0$, verifică relaţia
$$(1+x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

2. Să se determine extremele locale ale funcţiei reale de două variabile reale
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - e^{x\cdot y}.$$

3. Să se calculeze $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ şi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)$, dacă $z = z(x,y)$ este definită implicit de ecuaţia
$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

4. Ştiind că $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}$ şi determinând întâi funcţia
$$F(x) = \int_a^b 2ye^{-x^2y^2}dy,$$
să se calculeze integrala improprie depinzând de doi parametri
$$J(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}dx,$$
utilizând teorema de integrabilitate a unei integrale improprii depinzând de parametru.

5. Să se calculeze integrala triplă $I = \displaystyle\iiint_V x^2y^2z\,dxdydz$, unde domeniul V este mulţimea punctelor din spaţiu $\mathbb{R}^3$ mărginită de paraboloizii de rotaţie $z = x^2 + y^2$ şi $z = 4 - x^2 - y^2$.

   Indicaţie. *Deoarece domeniul de integrare este simplu în raport cu axa Oz, integrala triplă se scrie ca o iteraţie de două integrale, una dublă şi alta simplă, depinzând de parametri x şi y, şi anume*
$$I = \iint_D x^2y^2\,dxdy \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} z\,dz,$$
   unde D este proiecţia lui V pe planul Oxy, adică discul $x^2+y^2 \leq 2$. $\Longrightarrow I = \dfrac{2\pi}{3}$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se determine extremele locale ale funcţiei $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{1}{x} + yz$, definită pe semispaţiul $x > 0$.

   Răspuns. *Un singur punct staţionar care este punct de tip* **şa**.

2. Să se arate că funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia
$$F(x - az, y - bz) = 0,$$
   unde $F(u, v)$ este o funcţie diferenţiabilă, verifică relaţia $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

   Indicaţie. *În egalitatea* $F\Big(x - az(x, y), y - bz(x, y)\Big) = 0$ *se derivează compus faţă de* x, *după care se scoate* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. *Raţionamentul se repetă, derivând în raport cu* y, *de unde va rezulta* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. *Valorile găsite pentru derivate trebuie să verifice relaţia din enunţ.*

3. Determinând mai întâi funcţia $J(y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}dx$, unde $y > 0$, să se obţină valoarea integralei $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$, utilizând teorema de derivabilitate a unei integrale depinzând de parametru.

4. Să se calculeze integrala dublă $I = \displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, unde D este definit de inecuaţiile: $x^2 + y^2 \le 2x$; $x - y \le 0$.

   Indicaţie. *Prima inecuaţie reprezintă discul închis cu centrul pe* Ox, *în punctul* $C(1, 0)$, *având raza* 1. *Frontiera discului trece prin origine. A doua inecuaţie reprezintă semiplanul de deasupra primei bisectoare a reperului* Oxy. *Astfel, domeniul* D *arată ca o lentilă.* **Desenaţi–o!**. *Pentru calculul integralei, treceţi la coordonate polare* $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. *Lentila se transformă în domeniul* $\Omega = \{(\rho.\theta) \mid \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$. *Jacobianul transformării este* ρ, *iar integrala devine* $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3\cos\theta\, d\rho$ *etc.*

5. Calculaţi integrala de suprafaţă $I = \displaystyle\iint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$, unde suprafaţa S este conul $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ cuprins între planele $z = 0$ şi $z = 1$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergenţa seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Indicaţie. *Se aplică criteriul raportului şi se găseşte* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3n+2}{4n+1}$, *care la limită conduce la dubiu. Se aplică apoi criteriul lui Raabe.*

2. Să se arate că funcţia $f(x,y) = x^n\, e^{\frac{y}{x}} + y^n \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$ verifică ecuaţia

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - nf(x,y) = 0.$$

3. Determinaţi extremele locale ale funcţiei $f(x,y,z) = x + y^2 + 3z^3 - \ln(x+y+z)$.

Indicaţie. *Arătaţi mai întâi că funcţia are punctele staţionare*

$$M_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$$

iar apoi studiaţi–le natura pentru a vedea dacă sunt sau nu puncte de extrem.

4. Arătaţi că funcţia $F(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin y) dy$ verifică relaţia

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} F(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \text{unde} \quad a > 0.$$

Indicaţie. *Se introduce* $F(x)$, *se aplică teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de parametru şi se ţine cont că o integrală de forma* $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx$ *are valoarea* $\dfrac{a}{a^2+b^2}$, *unde constanta* b *este aici* $\sin y$.

5. Să se calculeze integrala dublă $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{(x^2+y^2)^n}\, dxdy$, unde $n \in I\!N^*$, iar domeniul D este coroana circulară definită prin inecuaţiile $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.

Indicaţie. *Se trece la coordonatele polare în plan* $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. *Se vede că* $\rho \in [\pi, 2\pi]$, *iar* $\theta \in [0, 2\pi)$. *Jacobianul transformării este* ρ.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se determine extremele locale ale funcţiei reale $f(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$.

   Indicaţie. *Arătaţi că f are un singur punct staţionar, şi anume $M_0(2,2)$, care este un punct de minim local strict.*

2. Să se arate că funcţia $f(x,y,z) = \dfrac{y}{x}\arcsin\dfrac{x}{y} + e^{xy-2z}$ verifică ecuaţia

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + xy\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

3. Să se determine extremele condiţionate (cu legături) ale funcţiei $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ ştiind că coordonatele x, y, z sunt legate prin relaţia $F(x,y,z) = 0$, unde $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$.

   Indicaţie. *Se introduce funcţia lui Lagrange*

$$\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z)$$

   căreia i se determină extremele locale.

4. Să se calculeze integrala curbilinie de speţa a doua

$$I = \int_{(AB)} \Big(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\Big)dx + \Big(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\Big)dy - \frac{xy}{z^2}dz,$$

   unde (AB) este un arc de curbă care uneşte punctul $A(1,-1,0)$ cu punctul $B(2,2,3)$.

   Indicaţie. *Din enunţ rezultă că integrala nu depinde de drum.* **Verificaţi aceasta!**. *Determinaţi apoi o primitivă $U(x,y,z)$ a expresiei diferenţiale $\omega = \Big(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\Big)dx + \Big(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\Big)dy - \dfrac{xy}{z^2}dz$. Atunci $I = U(B) - U(A)$.*

5. Să se calculeze integrala triplă $I = \iiint_V xy\,dxdydz$, unde V este mulţimea de puncte din spaţiu definită de inegalităţile

$$V : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \\ x^2 + y^2 \le x \\ z \ge 0. \end{cases}$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergenţa seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n}, \quad a \in I\!R_{+}^{*}.$$

Indicaţie. *Aplicaţi criteriul raportului. Se dă peste caz de dubiu. Se studiază apoi cu criteriul lui Raabe. La limită se găseşte* $2-a$, *care se compară cu* 1.

2. În ecuaţia cu derivate parţiale $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, să se treacă la noile variabile independente u şi v ştiind că $\begin{cases} u = y - ax \\ v = y + ax, \quad a > 0. \end{cases}$

Indicaţie. *Se foloseşte regula lanţului de derivare a unei funcţii compuse. Se ajunge la* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ *a cărei soluţie generală este* $z = f(u) + g(v)$, *din care deducem că* $z(x,y) = f(y-ax) + g(y+ax)$, *unde* f *şi* g *sunt funcţii arbitrare.*

3. Folosind derivabilitatea integralelor depinzând de parametru, să se determine

$$J(y) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)} dx.$$

Indicaţie. *Se derivează* $J(y)$ *folosind teorema de derivare a unei integrale depinzând parametru. Se obţine integrala* $J'(y) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} dx$, *care se calculează descompunând integrantul în fracţii simple, obţinându–se expresia lui* $J'(y)$. *Se integrează apoi expresia lui* $J'(t)$ *între limitele* 0 *şi* y.

4. Să se calculeze integrala dublă $I = \displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$, unde domeniul D este mărginit de curbele $y^2 = 2x$ şi $x + y = 2$.
Indicaţie. D *este un sector de parabolă.* D *este simplu în raport cu axa* Ox. *Proiecţia lui* D *pe axa* Oy *este compactul* $[-4, 2]$.

5. Să se calculeze volumul corpului V limitat de suprafeţele:

$$z = x^2 + y^2; \quad z = 0; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad x + y = 1.$$

Indicaţie. *Vol* $V = \displaystyle\iiint_V dxdydz$, *unde* V *este simplu în raport cu* Oz,

$$V = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \,:\, (x,y) \in D_{xy},\ 0 \le z \le x^2 + y^2\},$$

iar D_{xy} *este domeniul mărginit de dreptele:* $x = 0$; $y = 0$; $x + y - 1 = 0$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergenţa seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot (n+n)}.$$

2. Să se arate că funcţia $f(x,y,z) = e^{\frac{x^3}{y}} + x^4 - \frac{x^6 z}{y^2}$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + 3y\frac{\partial f}{\partial y} + 4\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

3. Să se arate că funcţia $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $F(x,y;z) = 0$, unde $F(x,y;z) = (y+z)\sin z - y(x+z)$, verifică relaţia $z \sin z\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. Să se arate că integrala improprie $I = \int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$ este convergentă şi apoi să se determine valoarea sa.

5. Să se calculeze elementul de arc ds, precum şi lungimea L, ale curbei

$$C: \quad \begin{cases} x = t \\ y = \arcsin t \\ z = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1-t}{1+t}, \quad t \in [0, \dfrac{1}{2}]. \end{cases}$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Utilizând formula lui Gauss–Ostrogradski (G–O), să se calculeze integrala de suprafaţă de speţa a doua $I = \iint_S xyz(x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy)$, unde S este porţiunea din primul octant a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
Indicaţie. *Pe pereţii octantului de sferă, situaţi în planele de coordonate, integrantul este nul, deci integralele de suprafaţă pe cele trei sferturi de disc vor fi nule, ca atare suprafaţei S i se poate adăuga cele trei sferturi de disc încât să devină o suprafaţă închisă. Acum se aplică formula $G - O$ şi se ajunge la integrala triplă $I = \iiint_V 6xyz\,dxdydz$, unde V este partea din primul octant a bilei cu centrul în origine de rază a. Se trece apoi la coordonate sferice.*

2. Să se determine extremele locale ale funcţiei $f(x,y) = 2x^2 + y - \ln\dfrac{x}{y^2}$.

3. Să se calculeze derivatele parţiale $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ ale funcţiei $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $z^2 - x\,e^y - y\,e^z - z\,e^x = 0$.

4. Să se calculeze integrala curbilinie de speţa a doua $I = \displaystyle\int_C \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, unde curba C este *sfertul* de astroidă cu braţe egale ale cărei ecuaţii parametrice sunt
$$C: \begin{cases} x = a\,\cos^3 t \\ y = a\,\sin^3 t, \quad t \in [0, \dfrac{\pi}{2}] \end{cases}$$

5. Să se calculeze calculeze integrala de suprafaţă de speţa întâi $I = \iint_S xz\,d\sigma$, unde S este porţiunea din conul circular cu vârful în origine şi axă de rotaţie axa Oz, de ecuaţie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, decupată de cilindrul circular de ecuaţie $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
Indicaţie. *Cilindrul are generatoarele paralele cu axa Oz şi curba directoare cercul din planul Oxy, cu centrul în punctul $C(1,0,0)$ şi raza 1. Cilindrul decupează porţiunea S din conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, care se proiectează în planul Oxy pe discul D definit de inecuaţia $x^2 + y^2 - 2x \le 0$. Se aplică formula de calcul a unei integrale de suprafaţă de speţa întâi $I = \iint_D x\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy$, unde p şi q sunt notaţiile lui Monge pentru derivatele paţiale de ordinul întâi: $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$; $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$.*

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcţia $f(x,y) = x\ln\dfrac{x-y}{x+y} + y\,e^{\frac{x}{y}}$ este soluţie a ecuaţiei
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

2. Să se determine extremele condiţionate ale funcţiei scop $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ cu legătura $x^2+y^2+z^2-1=0$.

3. Să se calculeze integrala improprie de speţa a doua $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x+3)\sqrt{x-1}}dx$, arătând mai întâi că este convergentă.

4. Să se calculeze integrala curbilinie de speţa întâi $I = \displaystyle\int_C y\,e^{-x}\,ds$, unde C este curba plană
$$C: \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

5. Să se afle volumul corpului V mărginit de suprafeţele $z = x^2+y^2$ şi $z = x$. **Indicaţie**. *Prima suprafaţă este paraboloid de rotaţie cu axa de rotaţie Oz, iar a doua este planul bisector al unghiului diedru format de planele Oxy şi Oyz, ambele delimitând corpul V, al cărui volum este integrala triplă $I = \iiint_V dxdydz$. Domeniul de integrare este simplu în raport cu axa Oz, deci I este o iteraţie de integrale, una simplă depinzând de doi parametri x şi y şi cealaltă, dublă, pe proiecţia corpului V pe planul Oxy.*

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergenţa seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n(n^2+n+1)^n}{n^{2n}}.$$

Discutaţi natura seriei după valorile pozitive ale parametrului a.
Indicaţie. *Se aplică criteriul radicalului. La limită, se găseşte a. Se compară a cu 1.*

2. Să se arate că funcţia $f(x,y,z) = \sqrt{y^3+3xyz} + xy\, e^{xy}$ este soluţie a ecuaţiei

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial f}{\partial y} + y^2\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

3. Determinaţi extremele condiţionate ale funcţiei scop $f(x,y) = x^2+y^2-y+x$, cu legătura $F(x,y,z) = 0$, unde $F(x,y) = x+y-1$.

4. Folosind teorema de derivare a unei integrale depinzând de un parametru, să se calculeze funcţia $J(y)$ definită ca o integrală improprie care depinde de parametrul y,

$$J(y) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(y\sin x)}{\sin x}dx.$$

5. Calculaţi integrala dublă $I = \iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, unde domeniul D este definit de inecuaţiile:

$$D: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1; \\ x+y \ge 0; \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Indicaţie. *Figuraţi grafic domeniul D, ţinându cont că prima inecuaţie reprezintă discul închis de rază 1 cu centrul în origine, a doua este regiunea superioară limitată de a doua bisectoare a reperului de coordonate Oxy, iar ultima inecuaţie este semiplanul superior. Intersecţia acestor regiuni determină domeniul D. Se trece la coordoante polare în plan: $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$, unde $\rho \in [0,1]$, iar $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$.* **Justificaţi aceste afirmaţii!** *Găsiţi valoarea integralei.*

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Seria geometrică. Discuţia naturii sale în raport cu raţia q.

   Scrieţi seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)$ ca suma a două serii geometrice, precizaţi–le raţiile, aflaţi–le sumele, şi calculaţi apoi suma seriei iniţiale.

2. Demonstraţi că funcţia $f(x,y)=x^3+y^2-6xy-39x+18y+24$ are un minim local strict în punctul staţionar $M_0(5,6)$.

3. Ecuaţia $F(x,y,z)=0$, unde $F(x,y,z)=\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, iar $\Phi(u,v)$ este o funcţie diferenţiabilă, defineşte implicit funcţia reală de două variabile reale $z=z(x,y)$.

   Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale sale precum şi diferenţiala de ordinul întâi $dz(x,y)$.

4. Arătaţi că integralele improprii de speţa a doua

   $$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx \quad \text{şi} \quad J=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,dx$$

   sunt convergente şi apoi demonstraţi că $I=J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

5. Să se scrie integrala dublă $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$, unde D este domeniul mărginit de curbele: $y=\sqrt{2ax-x^2}$; $y=\sqrt{2ax}$; $x=2a$, cu $a>0$, constantă, ca o iteraţie de integrale simple, descompunând în prealabil pe D ca o reuniune de trei domenii simple în raport cu axa Ox.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Folosind criteriul raportului şi apoi criteriul lui Raabe, să se studieze natura seriei numerice cu termeni pozitivi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

2. Să se determine extremele condiţionate ale funcţiei scop $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ ştiind că între variabilele sale există legătura $F(x,y) = 0$, unde
$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

3. Să se scrie integrala dublă $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$, unde D este domeniul mărginit de curbele: $y = \sqrt{2ax - x^2}$; $y = \sqrt{2ax}$; $x = 2a$, cu $a > 0$, constantă, ca o iteraţie de integrale simple, considerând că D este simplu în raport cu axa Oy.

4. Să se calculeze integrala triplă $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)z\,dxdydz$, unde domeniul V este mărginit de paraboloidul $z = x^2 + y^2$ şi de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ şi conţine o parte din porţiunea nenegativă a axei Oz.
   Indicaţie. *Domeniul de integrare este simplu în raport cu axa Oz căci se poate scrie ca*
$$V = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : \ (x,y) \in D_{xy}, \ x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{6 - x^2 - y^2}\},$$
   unde D_{xy} este proiecţia lui V pe planul Oxy
$$D_{xy} = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ x^2 + y^2 \le 2\}.$$
   Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa cotelor, obţinem
$$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dxdy.$$
   Mai departe se trece la coordonate polare. **Răspuns**: $I = \dfrac{8\pi}{3}$.

5. Formula integrală Riemann–Green.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze natura seriei numerice cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}\Big(\frac{n^2+1}{n^2-1}\Big)^{n^3}$.

   Indicaţie. *Se aplică criteriul radicalului. La limită se va da peste nedeterminarea* 1^∞ *care se va înlătura folosind o limită fundamentală, cea care are limita numărul e. Se găseşte că limita este* $\frac{e^2}{9}$. **Interpretaţi!**

2. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 8z - 5.$$

   Indicaţie. *Se arată că* f *are un singur punct critic* $M_0(0, 2, -4)$, *căruia va trebui sa–i precizaţi natura.*

3. Să se găsească diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0.$$

   Indicaţie. *Se scrie că* $z(x, y)$ *verifică ecuaţia şi apoi se diferenţiază egalitatea folosind regulile de diferenţiere.* **Răspuns:** $dz = -\dfrac{\sin 2x\, dx + \sin 2y\, dy}{\sin 2z}$.

4. Calculaţi integrala de suprafaţă de tipul întâi $I = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z)\, d\sigma$, unde $(\mathcal{S})$ este porţiunea din suprafaţa $z = 4 - x^2 - y^2$ situată în semispaţiul superior.

   Indicaţie. *Elementul de arie este* $d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$. *Integrala se calculează cu formula* $I = 4 \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$, *unde* D *este discul din planul* Oxy, *de rază 2 cu centrul în origine. Se folosesc coordonatele polare* ρ *şi* θ, *unde* $x = \rho\cos\theta$ *şi* $y = \rho\sin\theta$. **Răspuns**. $I = 2\pi(17\sqrt{17} - 1)/3$.

5. Să se calculeze integrala triplă $I = \iiint\limits_{I_3} \dfrac{dxdydz}{(x + y + z)^2}$, unde I_3 este intervalul tridimensional închis (paralelipipedul) $I_3 = [1, 3] \times [0, 1] \times [0, 2]$.

   Indicaţie. *Integrala este o iteraţie de trei integrale simple şi anume*

$$I = \int_1^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 \frac{dz}{(x + y + z)^2} = \int_1^3 dx \int_0^1 \Big(\frac{1}{x + y} - \frac{1}{x + y + 2}\Big) dy.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)^n$.
   Indicaţie. *Aplicaţi criteriul radicalului. La limită se obţine* 0. **Interpretaţi!**

2. În ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$, schimbaţi variabilele independente x, y şi funcţia necunoscută $z=z(x,y)$, conform relaţiilor: $u=x$; $v=\dfrac{1}{y}$; $w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$. Noua funcţie necunoscută este $w=w(u,v)$.
   Răspuns: $\dfrac{\partial w}{\partial u}=0$.

3. Determinaţi valoarea integralei curbiliinii de speţa întâi $I=\displaystyle\int_C\frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, unde C este bucla de elice cilindrică de ecuaţii parametrice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, iar $t\in[0,2\pi]$. **Răspuns:** $I=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{2\pi b}{a}$.

4. Calculaţi integrala dublă $I=\displaystyle\iint_D(x-y)dxdy$, unde domeniul D este mărginit de curbele: parabola $y=2-x^2$; dreapta $y=2x-1$.
   Indicaţie. *Se figurează grafic D şi se află proiecţia sa ortogonală pe axa Ox. Domeniul D fiind simplu în raport cu Oy, rezultă că* $I=\displaystyle\int_{-3}^{1}dx\int_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)dy$, *de unde se determină valoarea integralei duble I.* **Răspuns:** $I=\dfrac{64}{15}$.

5. Utilizând formula integrală Gauss–Ostrogradski, calculaţi integrala de suprafaţă de speţa a doua $I=\displaystyle\iint_S xy^2\,dydz+z^3\,dzdx+x^2z\,dxdy$, unde S este faţa exterioară a elipsoidului de ecuaţie $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2-1=0$.
   Indicaţie. *Formula integrală Gauss–Ostrogradski este*
$$\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iiint_V\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz$$
   unde V este corpul mărginit de elipsoid. Se obţine $I=\displaystyle\iiint_V(x^2+y^2)dxdydz$ *care se calculează fgolosind coordonatele polare generalizate în spaţiu*: $x=2\rho\cos\theta\sin\varphi$; $y=3\rho\sin\theta\sin\varphi$; $z=\rho\cos\varphi$. **Răspuns:** $I=\dfrac{104\pi}{5}$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze natura seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$.
Indicaţie. *Aplicând criteriul raportului, se dă peste caz de dubiu. Se foloseşte apoi la criteriul lui Raabe.*

2. Transformaţi ecuaţia cu derivate parţiale $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$ introducând noile variabile independente u, v şi noua funcţie necunoscută $w = w(u,v)$ prin relaţiile: $u = x^2 + y^2$; $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $w = \ln z - (x+y)$.
Indicaţie. *Diferenţiaţi relaţiile date, înlocuiţi–le în* $dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv$ *şi exprimaţi* dz. *Pe de altă parte,* $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. *Identificând coeficienţii lui* dx *şi* dy, *se obţin derivatele* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *şi ecuaţia devine* $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

3. Studiaţi natura integralei improprii de a doua speţă cu ambele limite de integrare puncte singulare $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, arătaţi că este convergentă şi determinaţi–i valoarea.
Indicaţie. *Pentru natură, se foloseşte criteriul în* α. *Pentru calculul valorii integralei, efectuaţi substituţia* $x = a\sin^2 t + b\cos^2 t$. *Se ajunge la* $I = 2\int_0^{\pi/2} dt$. *Deci,* $I = \pi$.

4. Să se afle elementul de arc ds şi lungimea L a curbei în spaţiu

$$C: \quad x = a\,e^{-t}\cos t, \quad y = a\,e^{-t}\sin t, \quad z = b\,e^{-t}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Indicaţie. *Folosiţi* $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$.
Răspuns: $ds = \sqrt{2a^2 + b^2}\,e^{-t}\,dt$; $L = \sqrt{2a^2 + b^2}$.

5. Să se calculeze volumul corpului din semispaţiul $z > 0$, mărginit de sferele: $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0$ şi de conul $x^2 + y^2 = z^2$.
Indicaţie. *Volumul lui* V *este dat de integrala triplă* $Vol V = \iiint_V dxdydz$. *Se trece la coordonatele sferice* $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$.
Răspuns: $\mathrm{Vol}\,V = \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)(2 - \sqrt{2})$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.